

李宏兵, 张佳佳. 2014. 多重孔岩石微分等效介质模型及其干燥情形下的解析近似式. 地球物理学报, 57(10): 3422-3430, doi: 10.6038/cjg20141028.

Li H B, Zhang J J. 2014. A differential effective medium model of multiple-porosity rock and its analytical approximations for dry rock. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 57(10): 3422-3430, doi: 10.6038/cjg20141028.

## 多重孔岩石微分等效介质模型及其 干燥情形下的解析近似式

李宏兵<sup>1</sup>, 张佳佳<sup>2</sup>

1 中国石油勘探开发研究院, 北京 100083

2 中国石油大学(华东)地球科学与技术学院, 青岛 266580

**摘要** 经典的微分等效介质(DEM)理论可用于确定多孔介质的弹性性质,但由于缺乏多重孔 DEM 方程,其估计的多重孔岩石的等效弹性模量依赖于包裹体(即不同孔隙纵横比的孔或缝)的添加顺序.本文首先从 Kuster-Toksöz 理论出发建立了 Zimmermann 和 Norris 两种形式的多重孔 DEM 方程. Norris 形式的多重孔 DEM 方程预测的等效弹性模量总是位于 Hashin-Shtrikman 上下限内,而 Zimmermann 形式的多重孔 DEM 方程有时会越界.然后,通过使用干燥岩石模量比的解析近似式,对两个相互耦合的 Norris 形式 DEM 方程进行解耦得到干燥多重孔岩石的体积和剪切模量解析式.用全 DEM 方程的数值解对解析近似式的有效性进行了测试,解析公式的计算结果在整个孔隙度分布区间与数值解吻合良好.对实验室测量数据在假设岩石含有双重孔隙的情形下用双重孔 DEM 解析公式对岩石的弹性模量进行了预测,结果表明,解析式准确地预测了弹性模量随孔隙度的变化.双重孔(即软、硬孔)DEM 解析模型可用来反演各孔隙类型的孔隙体积比,它可以通过实验室测量与理论预测之间的平方误差最小反演得到.砂岩样品的反演结果揭示,软孔的孔隙体积百分比与粘土含量没有明显的相关性.

**关键词** 微分等效介质理论; 多重孔隙类型; 弹性模量; 干岩石; 数学公式; 砂岩

doi:10.6038/cjg20141028

中图分类号 P631

收稿日期 2013-10-30, 2014-08-22 收修定稿

### A differential effective medium model of multiple-porosity rock and its analytical approximations for dry rock

LI Hong-Bing<sup>1</sup>, ZHANG Jia-Jia<sup>2</sup>

1 *Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing 100083, China*

2 *School of Geosciences, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China*

**Abstract** The classic differential effective medium (DEM) theory can be used to determine the elastic properties of the porous medium, but the final elastic properties of multiple-porosity rock depend on the added order of the different pore-type inclusions due to the lack of DEM equations for multiple-porosity rock. This paper first derives the differential equations of both Zimmermann's and Norris's versions for multiple-porosity rock from the Kuster-Toksöz theory. The elastic moduli predicted by the DEM equations of Norris's version never violate Hashin-Shtrikman bounds while those predicted by the DEM equations of Zimmermann's version violate bounds in some cases.

基金项目 国家自然科学基金(41404088), 国家油气重大专项(2011ZX05001)资助.

作者简介 李宏兵,男,1965年生,博士,教授级高级工程师.主要从事地震岩石物理及储层流体识别的方法研究及软件开发工作.

E-mail: hbingli@petrochina.com.cn

Then, we derive analytical solutions of the bulk and shear moduli for dry rock from the differential equations of Norris's version by applying an analytical approximation for dry-rock modulus ratio, in order to decouple these equations. The validity of these analytical approximations is tested by integrating the full DEM equation numerically. The analytical formulae give good estimates of the numerical results over the whole porosity range. The analytical formulae have been used to predict the elastic moduli for the sandstone experimental data by assuming that the porous rock contains dual-porosity of both cracks and pores. The results show that they can accurately predict the variations of elastic moduli with porosity for dry sandstones. We also apply nonlinear global optimization algorithm to find the best estimate for the pore volume percentage of both cracks and pores by minimizing the error between theoretical predictions and experimental measurements based on the dual-porosity DEM analytical model. The inversions for the sandstone experimental data show that there is no direct correlation between the crack volume percentage and clay volume.

**Keywords** Differential effective medium theory; Multiple-porosity type; Elastic moduli; Dry rock; Mathematical formula; Sandstone

## 1 引言

岩石的弹性性质显著依赖于孔隙系统的微观结构。绝大部分岩石通常发育两种乃至两种以上不同孔隙类型(孔隙、裂缝、洞等)的孔隙结构,复杂的孔隙系统使得岩石的速度与孔隙度之间的关系高度分散(Sayers, 2008; Baechle et al., 2008),因此,需要发展多重孔岩石物理模型来准确表征多孔岩石的弹性模量随孔隙度变化规律。

等效介质理论可用来研究多重孔岩石的弹性性质。常见的等效介质理论有 Kuster-Toksöz 理论和微分等效介质理论。Kuster 和 Toksöz(1974)基于波散射理论,考虑包裹体弹性性质、体积百分比和形状的影响,推导出多重孔岩石等效体积和剪切模量的显式表达式。但 Kuster-Toksöz 理论没有考虑孔隙间的相互作用,而且要求孔隙度与孔隙纵横比之比要远小于 1。Kuster-Toksöz 理论已被证明在某些情况下其估计的等效弹性模量与 Hashin-Shtrikman 上下限相冲突(Berryman, 1980)。微分等效介质(DEM)理论通过往固体矿物相中逐渐加入包裹体来模拟双相混合物,利用微分方程数值解研究干燥和饱和流体的多重孔岩石的等效弹性性质(Berryman, 1980; Norris, 1985; Zimmerman, 1985; Berryman et al., 2002)。与 Kuster-Toksöz 理论相比,DEM 理论从不越过 Hashin-Shtrikman 上下限(Berryman, 1980; Berryman and Berge, 1996; Berryman et al., 2002)。但是,由于关于体积和剪切模量的两个常微分方程

是隐式的并且相互耦合,很难得到准确的便于分析的弹性模量解析公式。因此,体积和剪切模量的性质只能通过微分方程的数值解来模拟,而且,对于多孔介质来说,利用 DEM 所模拟的岩石等效弹性性质依赖于包裹体(即不同孔隙纵横比的孔或缝)的添加顺序(Norris, 1985)。

Xu 和 White(1995)在 Kuster-Toksöz 理论的基础上发展了一种针对泥质砂岩的双孔(软、硬孔)模型——Xu-White 模型,两类孔隙的体积百分比分别由砂岩和粘土矿物的含量确定。但是该模型继承了 Kuster-Toksöz 存在问题,而且由于该模型采用了迭代算法,还存在计算效率的问题。Keys 和 Xu(2002)对 Xu-White 模型进行了改进,通过假设耦合方程中的干燥岩石的泊松比为常数的情形下得到干岩石骨架弹性模量,提高了运算效率。但是由他们给出的关系式推得的泊松比或模量比并不为常数。Xu 和 Payne(2009)把泥质砂岩的 Xu-White 模型推广到碳酸盐岩,得到 Xu-Payne 模型,但模型同样有 Xu-White 模型中存在的问题。

针对 DEM 理论缺乏解析式的问题,不少学者在这一方面做出了一些努力,取得一系列成果。Zimmerman(1991)从球孔的 DEM 方程得到干岩石骨架弹性模量的隐式解析式。Berryman 等(2002)基于 DEM 理论得到干燥和完全饱和裂隙型岩石弹性模量的近似解析式。Li 和 Zhang(2010, 2012)为了解决体积和剪切模量方程组的耦合问题,借助于干燥岩石模量比的近似解析式,考虑三个特定孔隙形状:球孔、针形孔和币形缝,由微分方程推导出干燥岩石体积和

剪切模量及弹性模量比的显式解析式. 同样, Li 和 Zhang(2011)基于 DEM 理论还给出了椭球孔的干岩石骨架模量的显式解析式. 这些 DEM 解析模型目前是基于单重孔隙系统提出的, 并已用于岩石的等效孔隙纵横比反演及横波速度预测中(Li et al., 2013).

本文基于等效介质理论得到夹杂多重椭球孔的干燥岩石的体积和剪切模量的解析公式, 利用它们来表征干燥多重孔岩石弹性模量随孔隙度的变化. 首先, 从 Kuster-Toksöz 理论的等效体积和剪切模量表达式出发, 推导出 Kuster-Toksöz 理论的微分形式; 然后, 基于微分等效理论得到夹杂椭球形孔的干燥多重孔岩石的模量比公式, 同时为了解决体积和剪切模量的两个常微分方程间的耦合问题, 利用干燥多重孔岩石的模量比近似公式推导干燥多重孔岩石体积和剪切模量的解析式; 接着, 我们使用理论模型检查解析近似式的计算结果并与 DEM 微分方程的数值计算相比较, 在所计算孔隙度的整个区间内讨论它们之间的一致性. 最后, 对实验室测量的干燥砂岩数据(Han et al., 1986), 利用解析近似式来预测多重孔岩石的弹性性质.

## 2 Kuster-Toksöz 理论的微分形式及其数值解

Kuster 和 Toksöz(1974)用长波长一阶散射理论推导了含  $N$  种包裹体的岩石等效弹性模量的

Kuster-Toksöz 理论表达式  $K_{KT}^*$  和  $G_{KT}^*$ :

$$(K_{KT}^* - K_m) \frac{3K_m + 4G_m}{3K_{KT}^* + 4G_m} = \phi \sum_{i=1}^N v_i (K_i - K_m) P^{mi}, \quad (1a)$$

$$(G_{KT}^* - G_m) \frac{3G_m + 4\xi_m}{3G_{KT}^* + 4\xi_m} = \phi \sum_{i=1}^N v_i (G_i - G_m) Q^{mi}. \quad (1b)$$

式中,  $K_m$  和  $G_m$  分别是背景基质的体积和剪切模量,  $v_i$  是第  $i$  种包裹体在孔隙度  $\phi$  中所占的体积百分比 ( $1 \leq i \leq N$ ),  $K_i$  和  $G_i$  分别是第  $i$  种包裹体的体积和剪切模量,  $P^{mi}$  和  $Q^{mi}$  是极化因子, 描述了在背景介质  $m$  中加入包裹体  $i$  之后的效果,  $\xi_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{8(K_m + 2G_m)}$ , 上标 \* 表示等效介质.

Kuster-Toksöz 理论可以与微分等效介质理论结合在一起估计多重孔岩石的弹性性质(Xu and White, 1995; Keys and Xu, 2002), 微分等效介质理论认为复合材料可通过在作为背景基质的复合材料中逐步加微小变化的包裹体来构造(Norris, 1985; Mavko et al., 1998; Berryman et al., 2002). 因此, 当在孔隙度为  $y$  的复合材料中添加微量孔隙度  $dy$  时, 此时式(1)中的  $K_m$  和  $G_m$  分别相当于添加前的  $K^*(y)$  和  $G^*(y)$ ,  $K_{KT}^*$  和  $G_{KT}^*$  分别相当于添加后的  $K^*(y + dy)$  和  $G^*(y + dy)$ ,  $P^{mi}$  和  $Q^{mi}$  变为  $P^{*i}$  和  $Q^{*i}$ , 相当于添加前的等效介质中加入包裹体  $i$  之后的效果, 因此式(1)重新写成

$$[K^*(y + dy) - K^*(y)] \frac{3K^*(y) + 4G^*(y)}{3K^*(y + dy) + 4G^*(y)} = dy \sum_{i=1}^N v_i [K_i - K^*(y)] P^{*i}, \quad (2a)$$

$$[G^*(y + dy) - G^*(y)] \frac{3G^*(y) + 4\xi^*(y)}{3G^*(y + dy) + 4\xi^*(y)} = dy \sum_{i=1}^N v_i [G_i - G^*(y)] Q^{*i}. \quad (2b)$$

由于  $dy \ll 1$ , 因此式(2)中的  $\frac{3K^*(y) + 4G^*(y)}{3K^*(y + dy) + 4G^*(y)} \approx 1$ ,  $\frac{3G^*(y) + 4\xi^*(y)}{3G^*(y + dy) + 4\xi^*(y)} \approx 1$ . 令  $dK^*(y) = K^*(y + dy) - K^*(y)$ ,  $dG^*(y) = G^*(y + dy) - G^*(y)$ , 式(2)两边同时除以  $dy$ , 则有

$$\frac{dK^*(y)}{dy} = \sum_{i=1}^N v_i [K_i - K^*(y)] P^{*i}, \quad (3a)$$

$$\frac{dG^*(y)}{dy} = \sum_{i=1}^N v_i [G_i - G^*(y)] Q^{*i}. \quad (3b)$$

式(3)即为 Kuster-Toksöz 理论的微分形式. Zimmerman(1984)给出了包裹体为单一球孔的类似微分方程, 该方程所蕴含的假设是当把新的孔隙加入到复合材料中时, 它总是替代先前复合材料中

的固体部分(Mavko et al., 1998), 式(3)目前常称之为 Zimmermann 形式的 DEM 方程. 而 Norris(1985)则认为新加入的孔隙既可能取代先前复合材料中的固体部分, 也可能取代已存在于复合材料中的孔隙, 它们的概率分别为  $1 - y$  和  $y$  (Norris, 1985; Mavko et al., 1998), 这样式(3)中的  $dy$  应为  $dy/(1 - y)$  (Mavko et al., 1998), 因此式(3)变为

$$(1 - y) \frac{dK^*(y)}{dy} = \sum_{i=1}^N v_i [K_i - K^*(y)] P^{*i}, \quad (4a)$$

$$(1 - y) \frac{dG^*(y)}{dy} = \sum_{i=1}^N v_i [G_i - G^*(y)] Q^{*i}. \quad (4b)$$

该式即为多重孔情形下 Norris 形式的微分等效介质模型, 当  $N = 1$  时, 与经典的 DEM 表达式相同

(Norris, 1985; Mavko et al., 1998; Li and Zhang, 2010). 这些方程通常从孔隙度  $y = 0$  开始积分, 并满足初始条件  $K^*(0) = K_m$  和  $G^*(0) = G_m$ , 然后继续从  $y = 0$  至所需的最高值  $y = \phi$  积分.

等效微分介质方程(4a)和(4b)一般是相互耦合的, 因为这两个方程都取决于复合材料的体积和剪切模量. 因此, 很难通过对 DEM 方程积分得出复合材料体积和剪切模量的解析公式.

我们对微分方程(3)和(4)进行数值求解并对其结果进行比较. 以石英作为主介质, 其体积和剪切模量分别取为  $K_m = 44$  GPa 和  $G_m = 37$  GPa. 岩石中含有三种不同形状的孔隙, 其孔隙纵横比  $\alpha$  分别为 1.0, 0.5 和 0.01, 它们的孔隙体积百分比分别取为 98.99%, 1% 和 0.01%, 以满足 Kuster-Toksöz 理论中假设的每种包裹体的孔隙度与孔隙纵横比要远小于 1 的要求 (Kuster and Toksöz, 1974). 使用四阶龙格-库塔法来计算微分方程的数值解, 数值积分中应用的步长取为  $\Delta y = 0.01$ . 考虑孔隙中充填了两种不同类型的材料, 一种是固体, 一种是干燥空腔, 固

体包裹体的弹性模量分别取为  $K_i = 14$  GPa 和  $G_i = 10$  GPa, 而干燥空腔的弹性模量则简单置为零. 图 1 是两种形式的 DEM 方程数值解结果对比, 式(3)的数值解用粉红点显示, 式(4)的数值解用蓝点显示, 我们还给出了 Kuster-Toksöz 理论的估计结果, 图中用黑点显示, 同时还计算了 Hashin-Shtrikman 边界 (Mavko et al., 1998), 图中用红线显示. 图 1a, 1b 分别是含固体包裹体的岩石等效体积和剪切模量数值比较结果. 图 1c, 1d 分别是含干燥空腔的岩石等效体积和剪切模量数值比较结果. 可以看到, 两种包裹体的 Kuster-Toksöz 理论计算结果与 Hashin-Shtrikman 上边界完全相同, 式(3)的数值解在孔隙度较低时与 Kuster-Toksöz 理论相接近, 而随着孔隙度的增大, 式(3)的数值解则与 Kuster-Toksöz 理论相差越来越大, 远超 Hashin-Shtrikman 上边界, 而不具有物理意义. 可见式(3)只适合于孔隙度很低时的多孔岩石弹性模量模拟. 而式(4)的数值解始终位于 Hashin-Shtrikman 边界之间. 由于式(3)在孔隙度较大时其估计的等效弹性模量与 Hashin-

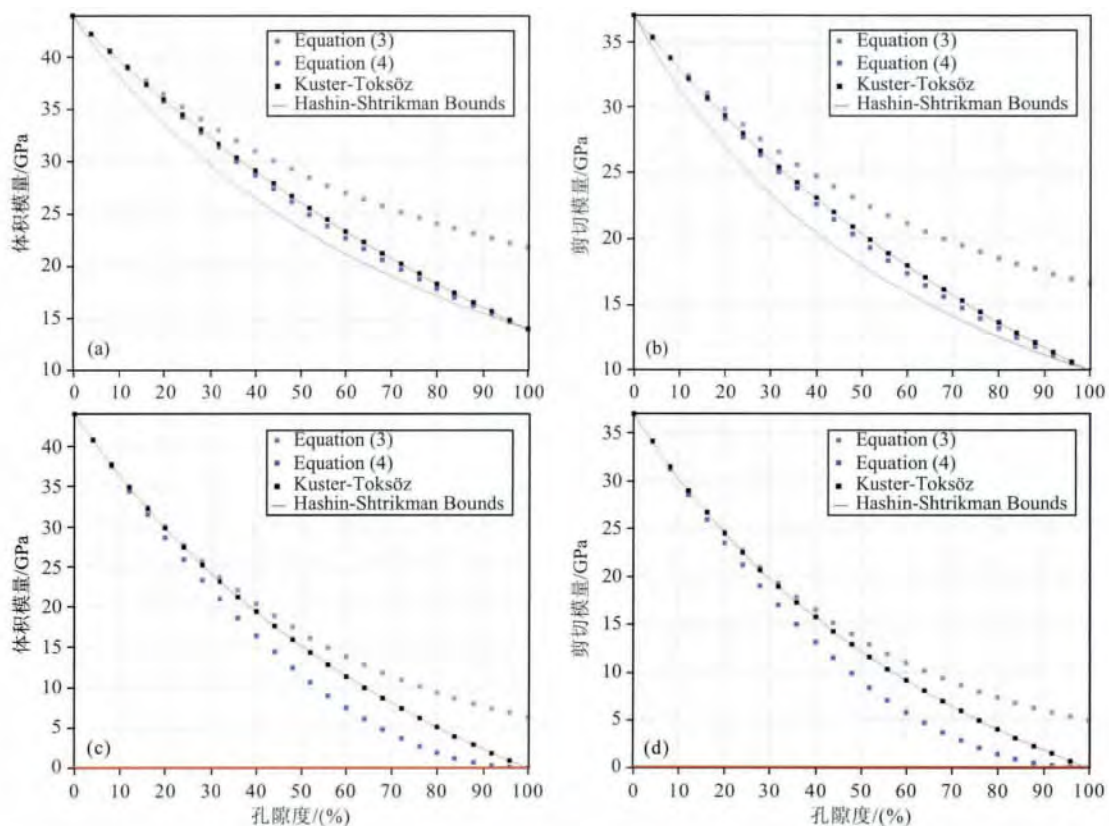


图 1 多重孔岩石 DEM 方程数值解与 Kuster-Toksöz 理论结果对比

(a) 含固体包裹体的岩石体积模量; (b) 含固体包裹体的岩石剪切模量; (c) 含干燥空腔的岩石体积模量; (d) 含干燥空腔的岩石剪切模量.

Fig. 1 Comparison of the numerical solutions of the DEM equations and Kuster-Toksöz estimates for porous rock. The bulk (a) and shear (b) moduli for solid inclusions. The bulk (c) and shear (d) moduli for dry inclusions.

Shtrikman 上下限相冲突, 在下面的数值试验中, 我们只使用式(4)来估计多重孔岩石的等效弹性模量.

### 3 干燥多重孔岩石弹性模量 DEM 解析近似式

对于干燥岩石, 每种包裹体的弹性模量  $K_i = 0$  和  $G_i = 0 (1 \leq i \leq N)$ , 式(4)变成

$$(1-y) \frac{dK^*(y)}{K^*(y)dy} = - \sum_{i=1}^N v_i P^{*i} \quad (5a)$$

和

$$(1-y) \frac{dG^*(y)}{G^*(y)dy} = - \sum_{i=1}^N v_i Q^{*i}. \quad (5b)$$

同样, 式(5a)和(5b)也是相互耦合的, 因为这两个方程也依赖于复合材料的体积和剪切模量 (Berryman, 1980; Li and Zhang, 2011). 因此, 同样很难对 DEM 方程积分得到干燥多重孔岩石体积和剪切模量的解析公式. 采用 Li 和 Zhang (2010, 2011) 类似的假设, 即等效极化因子之差  $P_{eff}^* - Q_{eff}^*$  和等效模量比  $K^*(y)/G^*(y)$  之间存在一个几乎线性的关系, 我们可以得到干燥多重孔岩石的模量比解析公式 (公式推导见附录 A)

$$\frac{K_{dry}}{G_{dry}} = \frac{K_m}{G_m} \frac{(1-\phi)^a}{1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m}(1-\phi)^a}, \quad (6)$$

式中,  $K_{dry}$  和  $G_{dry}$  分别为干燥多重孔岩石的体积模量和剪切模量, 常数  $a$  和  $b$  分别为满足  $P_{eff}^* - Q_{eff}^* = a + bK^*(y)/G^*(y)$  的截距和梯度 (Li and Zhang, 2010),  $a = \sum_{i=1}^N v_i a_i, b = \sum_{i=1}^N v_i b_i$ , 常数  $a_i$  和  $b_i$  分别为第  $i$  种孔隙 (由于包裹体中没有流体, 此时包裹体实为孔隙) 的  $P^{*i} - Q^{*i}$  的截距和梯度, 常数  $b_i$  可以简单设置为极化因子之差  $P^{*i} - Q^{*i}$  的一阶导数在  $K^*/G^* = K_m/G_m$  时所取的值,  $b_i$  已知后常数  $a_i$  就能够由公式  $P^{*i} - Q^{*i} = a + bK^*(y)/G^*(y)$  来计算得到 (Li and Zhang, 2011, 2012), 椭圆包裹体的极化因子之差  $P^{*i} - Q^{*i}$  及其一阶导数见 Li 和 Zhang (2011) 论文的附录 A.

为了解决体积模量和剪切模量微分方程间的耦合问题, 把式(6)代入到式(5a)中, 然后在积分区间  $[0, \phi]$  对之进行积分, 直接得到有关  $K_{dry}$  的解析式, 接着用  $K_{dry}$  的解析式除以式(6)就得到相应的  $G_{dry}$  的解析式, 因此有 (公式推导见附录 B)

$$K_{dry} = K_m \frac{(1-\phi) \sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K_m/G_m} \right]}{\left[ 1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m}(1-\phi)^a \right]^{\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i}}{b}}}, \quad (7)$$

$$G_{dry} = G_m \frac{(1-\phi) \sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K_m/G_m} \right]^{-a}}{\left[ 1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m}(1-\phi)^a \right]^{\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i}}{b} - 1}}, \quad (8)$$

式中  $S_{0i} = \frac{2 - 3g_i - 3\theta_i}{4\theta_i - 6\theta_i^2 - 4g_i}, S_{1i} = \frac{\theta_i - g_i}{2 - 3g_i - 3\theta_i},$

$S_{2i} = \frac{4}{3}, S_{3i} = \frac{2(\theta_i - g_i)}{3(2\theta_i - 3\theta_i^2 - 2g_i)},$

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i^2)^{3/2}} [\arccos(\alpha_i) - \alpha_i \sqrt{1-\alpha_i^2}] & (\alpha_i < 1) \\ \frac{\alpha_i}{(\alpha_i^2-1)^{3/2}} [\alpha_i \sqrt{\alpha_i^2-1} - \operatorname{arcosh}(\alpha_i)] & (\alpha_i > 1) \end{cases},$$

$g_i = \frac{\alpha_i^2}{1-\alpha_i^2} (3\theta_i - 2), \alpha_i$  为第  $i$  种椭球孔的纵横比.

### 4 理论和实验室数据比较

式(7)–(8)可以用来研究孔隙岩石中含有两种或两种以上孔隙形状的干燥岩石等效弹性性质. 目前大多数研究主要针对双重孔岩石 (Xu and White, 1995), 为了方便对比, 我们这里也只对干燥双重孔岩石体积和剪切模量的解析式作理论和实验室数据分析.

首先对微分方程的数值解与解析式的结果作比较. 同样以石英作为主介质, 其体积和剪切模量与图 1 相同, 分别取为  $K_m = 44$  GPa 和  $G_m = 37$  GPa. 岩石中含有两种不同形状的孔隙, 其孔隙纵横比  $\alpha$  分别为 0.15 和 0.005, 分别代表孔和缝. 为了表征不同孔缝发育程度对岩石弹性性质的影响, 考虑了三种不同的孔缝体积百分比, 分别为 (90%, 10%)、(50%, 50%) 和 (10%, 90%). 同样使用四阶龙格-库塔法来计算微分方程(5)的数值解. 图 2 是解析和数值解的比较结果, 图中, 点代表数值结果, 实线代表由式(7)–(8)计算的解析结果, 式(7)–(8)中的常数  $b$  简单设置为极化因子之差的一阶导数在  $K^*/G^* = K_m/G_m = 1.1892$  时所取的值,  $b$  已知后常数  $a$  就可由公式  $P^{*i} - Q^{*i} = a + bK^*(y)/G^*(y)$  来计算 (具体公式见附录 A 中). 结果表明, 无论是

体积模量还是剪切模量,三种不同孔缝体积百分比情况下的解析解与数值解都充分吻合.随着裂缝体积百分比的增大,岩石的等效弹性模量总体呈下降趋势,裂缝体积百分比从10%增加到50%时弹性模

量的下降速率比其从50%增加到90%时的速率要大很多.

我们利用Han等(1986)测量的69个干燥砂岩的岩石物理数据来分析解析式的预测效果.所测量

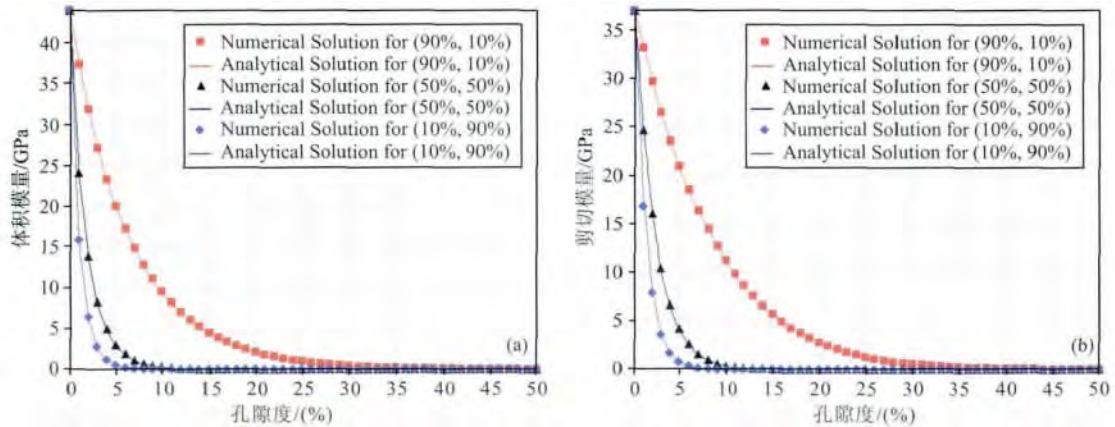


图2 干燥双重孔岩石不同孔隙体积比的(a)体积和(b)剪切模量数值解与解析式预测结果对比

Fig. 2 Comparison of the numerical and analytical solutions of dry-rock bulk (a) and shear (b) moduli for dual-porosity rock with different pore volume percentages

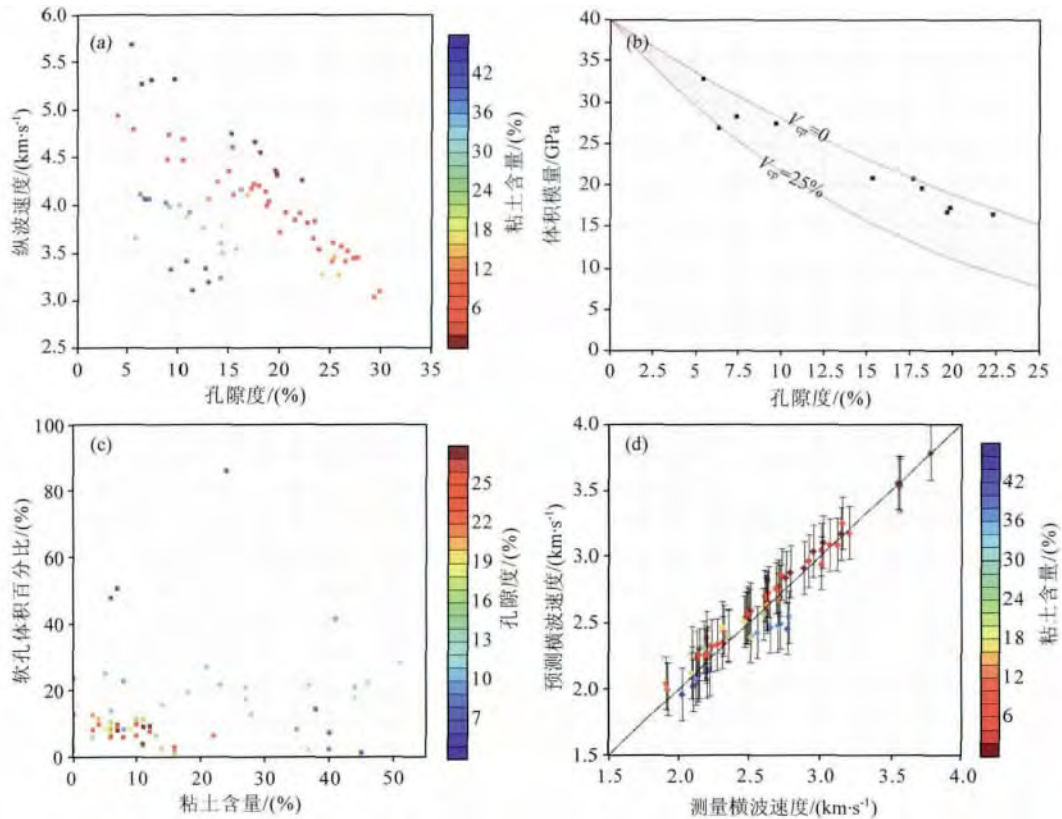


图3 实验室测量的干燥砂岩样品的速度与解析式预测结果对比

(a)纵波速度与孔隙度之间的关系;(b)纯净砂岩样品的体积模量与理论预测比较;(c)估计的软孔体积百分比与粘土含量之间的关系;(d)实验室测量的横波速度与理论预测.

Fig. 3 Result analysis of the experimental sandstone data measured by Han (1986) and theoretical estimations of the DEM analytical formulae for dual-porosity rock

(a) P wave versus porosity for experimental data; (b) Bulk modulus versus porosity for 10 samples of clean sandstone and the theoretical predictions; (c) The estimated compliant pore volume percentage versus clay volume; (d) Comparison of S wave between the experimental result and the theoretical calculation from the estimated pore volume percentage.

的纵波和横波速度数据是在围压 40 MPa 下分别采用超声频率 1 MHz 和 0.6 MHz 完成的,砂岩样品的孔隙度分布范围为 5%~30%,粘土含量分布范围为 0~50%。图 3a 是 69 个干燥样品的纵波速度与孔隙度之间的关系。测量结果表明,干燥碎屑岩的纵波速度随孔隙度增加而降低,随着粘土含量的增大而下降。用于分析的矿物弹性模量由 Han 提供,其中矿物石英的体积和剪切模量分别为 40 GPa 和 43.7 GPa,粘土的体积和剪切模量分别为 20.9 GPa 和 6.85 GPa。我们采用双重孔 DEM 解析模型来研究测量样品的弹性模量,硬、软孔的孔隙纵横比分别取为 0.18 和 0.04。在运用式(7)和(8)预测弹性模量随孔隙度的变化时还需提供两种孔隙的体积百分比。图 3b 显示了 69 个样品中 10 个纯砂岩样品的干燥岩石的体积模量在不同的孔隙体积百分比条件下随孔隙度的变化特征,从图中可以看到,当软孔的孔隙体积百分比  $V_{cp}=0$  时,只有两个点位于预测的曲线上,而有一个点(孔隙度等于 6%)偏离  $V_{cp}=0$  的预测曲线最远。逐步增加软孔的体积百分比,直至  $V_{cp}=25\%$  时,其模量预测曲线才与这个点接近吻合。这说明 10 个样品中只有 2 个样品不发育软孔,其他 8 个样品同时发育软硬孔,但各个样品的软硬孔发育程度不尽相同。我们使实验室测量的纵波模量与式(7)和(8)理论预测的模量之间的平方误差最小来估计每个砂岩样品的软孔体积百分比。图 3c 显示了反演的软孔体积百分比与粘土含量之间的关系,总体看,岩石的孔隙度越大,其软孔体积百分比越小,但软孔体积百分比与粘土含量没有明显的正相关。根据式(7)和(8)和反演的软孔体积百分比可以正演得到干燥岩石样品的横波速度,图 3d 是预测与测量的横波速度之间的对比,图中还显示了每个点在置信水平为 95% 的误差棒。可以看到,绝大多数样品的预测值与实测值吻合良好,这说明碎屑砂岩的孔隙结构可以用双重孔 DEM 解析模型来表征。

## 5 结论

借助于 Kuster-Toksöz 理论,本文建立了 Zimmermann 和 Norris 两种形式的多重孔岩石微分等效介质方程,并由 Norris 形式的微分方程推导出干燥多孔岩石体积和剪切模量的解析式。解析式是矿物颗粒的体积和剪切模量、孔隙度、孔隙体积百分比和孔隙几何形状的函数,孔隙几何形状由参数截距  $a$  和梯度  $b$  来表征,它可以根据每种孔隙的极

化因子之差及其一阶导数在等效模量比等于矿物颗粒模量比取的值近似计算得到。

多重孔岩石微分等效介质模型避免了经典的 DEM 方程在用于研究多重孔岩石的弹性性质时其估计的等效弹性模量依赖于包裹体的添加顺序问题。当多重孔退化为单重孔时,多重孔岩石 DEM 方程即为经典的 DEM 方程。

数值试验结果表明,Norris 形式的多重孔 DEM 方程估计的等效弹性模量始终位于 Hashin-Shtrikman 上下限内,而 Zimmermann 形式的多重孔 DEM 方程在孔隙度较大时其估计的等效弹性模量与 Hashin-Shtrikman 上下限相冲突,因此后者只适合于孔隙度很低时的多重孔岩石弹性模量模拟。

理论模型和实验室数据试算表明:解析式的计算结果与全 DEM 方程的数值解吻合良好。多重孔 DEM 解析式可以准确地预测弹性模量随孔隙度的变化。双重孔(即软、硬孔)DEM 解析模型可以用来反演各孔隙类型的孔隙体积比,它可以通过实验室测量与理论预测之间的平方误差最小反演得到。砂岩样品的反演结果揭示,软孔的孔隙体积百分比与粘土含量没有明显的正相关。

致谢 感谢匿名评阅人对本文提出的宝贵修改意见。

## 附录 A 多重孔干燥岩石模量比的解析式推导

首先定义等效极化因子,它们是介质中包含的所有孔隙的极化因子的体积加权,即

$$P_{\text{eff}}^* = \sum_{i=1}^N v_i P^{*i} \quad (\text{A1})$$

和

$$Q_{\text{eff}}^* = \sum_{i=1}^N v_i Q^{*i}. \quad (\text{A2})$$

于是式(5)变成

$$(1-y) \frac{dK^*(y)}{K^*(y)dy} = -P_{\text{eff}}^* \quad (\text{A3})$$

和

$$(1-y) \frac{dG^*(y)}{G^*(y)dy} = -Q_{\text{eff}}^*, \quad (\text{A4})$$

由此可见,式(A3)—(A4)与经典的单重孔 DEM 微分方程形式(Norris, 1985; Mavko, et al., 1998; Li and Zhang, 2010)完全一致,其解析近似式可用类似于 Li 和 Zhang(2011, 2012)的方法得到。

式(A3)减去式(A4)得到

$$(1-y) \frac{d[K^*(y)/G^*(y)]}{K^*(y)/G^*(y)dy} = -(P_{\text{eff}}^* - Q_{\text{eff}}^*). \quad (\text{A5})$$

Li 和 Zhang(2010)假设干燥单重孔岩石的极化因子  $P^{*i}$  和  $Q^{*i}$  之差 ( $P^{*i} - Q^{*i}$ ) 与干岩石模量比  $K^*(y)/G^*(y)$  之间存在近似线性关系,也就是说对于多重孔岩石中的第  $i$  个孔隙来说,有

$$P^{*i} - Q^{*i} = a_i + b_i K^*(y)/G^*(y), \quad (A6)$$

式中  $a_i$  和  $b_i$  取决于孔隙形状,而且  $a_i < 0, b_i \geq 0$ . 这种假设对多重孔隙系统同样适用,因为

$$\begin{aligned} P_{\text{eff}}^* - Q_{\text{eff}}^* &= \sum_{i=1}^N v_i (P^{*i} - Q^{*i}) \\ &= \sum_{i=1}^N v_i a_i + \sum_{i=1}^N v_i b_i K^*(y)/G^*(y) \\ &= a + b K^*(y)/G^*(y), \end{aligned} \quad (A7)$$

式中  $a = \sum_{i=1}^N v_i a_i, b = \sum_{i=1}^N v_i b_i$ .

将式(A7)代入到式(A5)中,可得到

$$\frac{d[K^*(y)/G^*(y)]}{K^*(y)/G^*(y)[a + bK^*(y)/G^*(y)]} = -\frac{dy}{1-y}, \quad (A8)$$

式(A8)进一步分解成

$$\frac{d[K^*(y)/G^*(y)]}{K^*(y)/G^*(y)} - \frac{bd[K^*(y)/G^*(y)]}{a + bK^*(y)/G^*(y)}$$

式中,  $\theta_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i^2)^{3/2}} [\arccos(\alpha_i) - \alpha_i \sqrt{1-\alpha_i^2}] & (\alpha_i < 1) \\ \frac{\alpha}{(\alpha_i^2-1)^{3/2}} [\alpha_i \sqrt{\alpha_i^2-1} - \text{arcosh}(\alpha_i)] & (\alpha_i > 1) \end{cases}, g_i = \frac{\alpha_i^2}{1-\alpha_i^2} (3\theta_i - 2), \alpha_i$  为第  $i$  个椭球孔的孔隙纵横比. 因此,极化因子  $P^{*i}$  是等效模量比  $K^*/G^*$  和孔隙纵横比的函数.

由式(5a)和式(B1),有

$$(1-y) \frac{dK^*(y)}{K^*(y)dy} = - \sum_{i=1}^N v_i \frac{\left[ \frac{\theta_i}{2} - \frac{g_i}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}g_i - \frac{3}{2}\theta_i\right) \frac{K^*}{G^*} \right] \left( \frac{K^*}{G^*} + \frac{4}{3} \right)}{\frac{2}{3}\theta_i - \frac{2}{3}g_i + (2\theta_i - 3\theta_i^2 - 2g_i) \frac{K^*}{G^*}}, \quad (B2)$$

式(B2)右边进一步分解成

$$(1-y) \frac{dK^*(y)}{K^*(y)dy} = - \sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ \frac{K^*(y)}{G^*(y)} + S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K^*(y)/G^*(y)} \right], \quad (B3)$$

式中

$$S_{0i} = \frac{2 - 3g_i - 3\theta_i}{4\theta_i - 6\theta_i^2 - 4g_i}, \quad (B4)$$

$$S_{1i} = \frac{\theta_i - g_i}{2 - 3g_i - 3\theta_i}, \quad (B5)$$

$$S_{2i} = \frac{4}{3}, \quad (B6)$$

$$S_{3i} = \frac{2(\theta_i - g_i)}{3(2\theta_i - 3\theta_i^2 - 2g_i)}. \quad (B7)$$

对式(B3)右边的最后一项在  $y = 0$  附近作泰勒展开,则式(B3)可写为

$$= -\frac{ady}{1-y}. \quad (A9)$$

在积分区间  $[0, \phi]$  对式(A9)进行积分,并满足初始条件

$$\frac{K_{\text{dry}}(0)}{G_{\text{dry}}(0)} = \frac{K_m}{G_m}, \quad (A10)$$

得到

$$\ln \frac{K^*(y)/G^*(y)}{a + bK^*(y)/G^*(y)} \Big|_{\frac{K_m}{G_m}}^{\frac{K_{\text{dry}}}{G_{\text{dry}}}} = \ln(1-y)^a \Big|_0^\phi, \quad (A11)$$

式中  $0 \leq \phi < 1$ . 式(A11)进一步整理写成

$$\frac{K_{\text{dry}}}{G_{\text{dry}}} = \frac{K_m}{G_m} \frac{(1-\phi)^a}{1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m}(1-\phi)^a}. \quad (A12)$$

### 附录 B 多重孔干燥岩石体积和剪切模量的解析式推导

根据 Li 和 Zhang(2011)论文的附录 A,干燥多重孔岩石中第  $i$  个椭球孔的极化因子为

$$P^{*i} = \frac{\left[ \frac{\theta_i}{2} - \frac{g_i}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}g_i - \frac{3}{2}\theta_i\right) \frac{K^*}{G^*} \right] \left( \frac{K^*}{G^*} + \frac{4}{3} \right)}{\frac{2}{3}\theta_i - \frac{2}{3}g_i + (2\theta_i - 3\theta_i^2 - 2g_i) \frac{K^*}{G^*}}, \quad (B1)$$

$$(1-y) \frac{dK^*(y)}{K^*(y)dy} = - \sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left\{ \frac{K^*(y)}{G^*(y)} + S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + (S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i}) \left[ \frac{1}{S_{3i} + K_m/G_m} + \frac{K_m(P^{*i} - Q^{*i})}{G_m(S_{3i} + K_m/G_m)^2} \left| \frac{K^*}{G^*} = \frac{K_m}{G_m} \right. \frac{y}{1-y} + \dots \right] \right\}, \tag{B8}$$

对于干燥岩石,式(B8)中的  $K^*(y)/G^*(y) = K_{dry}(y)/G_{dry}(y)$ . 把式(6)代入到式(B8),并对其在  $y = 0$  到  $\phi$  积分,由于  $0 \leq y \leq \phi$  和  $0 \leq \phi \leq 1$ , 忽略  $\phi$  的平方以上项,得到

$$\ln K^* \Big|_{K_m}^{K_{dry}} = \ln \left[ a + b \frac{K_m}{G_m} - b \frac{K_m}{G_m} (1-y)^a \right]^{-\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i}}{b}} (1-y)^{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K_m/G_m} \right]} \Big|_0^{\phi}. \tag{B9}$$

对式(B9)整理得到

$$K_{dry} = K_m \frac{(1-\phi)^{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K_m/G_m} \right]}}{\left[ 1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m} (1-\phi)^a \right]^{\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i}}{b}}}. \tag{B10}$$

式(B10)除以式(6),得到

$$G_{dry} = G_m \frac{(1-\phi)^{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i} \left[ S_{1i} + S_{2i} - S_{3i} + \frac{(S_{1i} - S_{3i})(S_{2i} - S_{3i})}{S_{3i} + K_m/G_m} \right]}^{-a}}{\left[ 1 + \frac{bK_m}{aG_m} - \frac{bK_m}{aG_m} (1-\phi)^a \right]^{\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_{0i}}{b} - 1}}. \tag{B11}$$

References

Baechle G T, Colpaert A, Eberli G P, et al. 2008. Effects of microporosity on sonic velocity in carbonate rocks. *The Leading Edge*, 27(8): 1012-1018.

Berryman J G. 1980. Long-wavelength propagation in composite elastic media II. Ellipsoidal inclusions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(6): 1820-1831.

Berryman J G, Berge P A. 1996. Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites. *Mech. Materials*, 22(2): 149-164.

Berryman J G, Pride S R, Wang H F. 2002. A differential scheme for elastic properties of rocks with dry or saturated cracks. *Geophys. J. Int.*, 151(2): 597-611.

Han D H, Nur A, Morgan D. 1986. Effects of porosity and Clay content on wave velocities in sandstones. *Geophysics*, 51(11): 2093-2107.

Keys R G, Xu S Y. 2002. An approximation for the Xu-White velocity model. *Geophysics*, 67(5): 1406-1414.

Kuster G T, Toksöz M N. 1974. Velocity and attenuation of seismic waves in two media, Part I. Theoretical considerations. *Geophysics*, 39(5): 587-606.

Li H B, Zhang J J. 2010. Modulus ratio of dry rock based on differential effective-medium theory. *Geophysics*, 75(2): N43-N50.

Li H B, Zhang J J. 2011. Elastic moduli of dry rocks containing spheroidal pores based on differential effective medium theory. *J. Appl. Geophys.*, 75(4): 671-678.

Li H B, Zhang J J. 2012. Analytical approximations of bulk and shear moduli for dry rock based on the differential effective medium theory. *Geophys. Prospect.*, 60(2): 281-292.

Li H B, Zhang J J, Yao F C. 2013. Inversion of effective pore aspect ratios for porous rocks and its applications. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 56(2): 608-615.

Mavko G, Mukerji T, Dvorkin J. 1998. *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis in Porous Media*. New York: Cambridge University Press.

Norris A N. 1985. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech. Materials*, 4(1): 1-16.

Sayers C M. 2008. The elastic properties of carbonates. *The Leading Edge*, 27(8): 1020-1024.

Xu S Y, Payne M A. 2009. Modeling elastic properties in carbonate rocks. *The Leading Edge*, 28(1): 66-74.

Xu S Y, White R E. 1995. A new velocity model for clay-sand mixtures. *Geophys. Prospect.*, 43(1): 91-118.

Zimmerman R W. 1984. Elastic moduli of a solid with spherical pores; new self-consistent method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 21(6): 339-343.

Zimmerman R W. 1985. The effect of microcracks on the elastic moduli of brittle materials. *J. Mater. Sci. Lett.*, 4(12): 1457-1460.

Zimmerman R W. 1991. Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions. *Mech. Materials*, 12(1): 17-24.

附中文参考文献

李宏兵, 张佳佳, 姚逢昌. 2013. 岩石的等效孔隙纵横比反演及其应用. *地球物理学报*, 56(2): 608-615.

(本文编辑 何燕)